ANDRZEJ BANACHOWICZ
Akademia Morska w Gdyni
Katedra Nawigacji

ELEMENTY GEOMETRYCZNE ELIPSOIDY ZIEMSKIEJ

W artykule przedstawiono definicje, opis oraz wyprowadzenia wzorów określających podstawowe elementy geometryczne elipsoidy z punktu widzenia zainteresowań geodezji, kartografii i nawigacji. Tym samym odnoszą się one do elipsoid ziemskich bądź odniesienia. Określenia te oraz poszczególne wzory wykorzystywane są w obliczeniach geodezyjnych, obliczaniu siatek kartograficznych (ECDIS) oraz w obliczeniach nawigacyjnych – zintegrowane systemy nawigacyjne i zautomatyzowane odbiorniki systemów radionawigacyjnych, transformacji współrzędnych, planowania podróży oraz w wielu innych zagadnieniach.

WPROWADZENIE

Żegluga morska jest uprawiana na powierzchni mórz i oceanów (nie licząc okrętów i pojazdów podwodnych), a więc na fizycznej powierzchni Ziemi. Dlatego też w nawigacji morskiej ważna jest znajomość rzeczywistego kształtu i rozmiarów naszego globu lub takiego jego przybliżenia, które zapewniałoby wymaganą dokładność wykonywania pomiarów i obliczeń nawigacyjnych.

Zagadnienie określania figury Ziemi, jak i jej matematycznych modeli należy do geodezji wyższej i geodezji dynamicznej. Poglądy na temat kształtu Ziemi i jej rozmiarów ulegały zmianom wraz z rozwojem nauki, podróżami morskimi oraz innymi potrzebami praktycznymi. Od wyobrażeń starożytnych, płaskiego lądu na powierzchni oceanu, doszliśmy do pojęcia geoidy, elipsoidy ziemskiej i elipsoidy odniesienia. Elementy elipsoid ziemskich oraz faktyczny kształt Ziemi są coraz dokładniej określane w czym duży udział mają również techniki satelitarne. Badania prowadzone od prawie trzystu lat wykazały, że kształt Ziemi jest bardzo skomplikowany i praktycznie nieopisywalny matematycznie. W nawigacji przyjmuje się jako matematyczny model Ziemi elipsoidę obrotową (spłaszczoną), sferę (powierzchnię) kuli lub płaszczyznę odwzorowania – Merkatora, Gaussa-Krügera (UTM) i inne. Należy jednak zdawać sobie sprawę z tego, że każdy z tych modeli jest pewnym przybliżeniem i jego zakres stosowania musi być odpowiedni do wykorzystywanych nawigacyjnych metod pomiarowych i obliczeniowych.

1. GEOIDA

Pojęcie geoidy wprowadził niemiecki uczony Johann B. Listing w 1873 roku jako odpowiednika rzeczywistego, fizycznego kształtu globu ziemskiego.

Geoidą nazywamy powierzchnię ekwipotencjalną, pokrywającą się w przybliżeniu z powierzchnią oceanów przy pełnej równowadze znajdujących się w nich mas wody. Henri Poincaré wykazał, że niemożliwe jest opisanie geoidy na obszarze lądów i oceanów za pomocą jednej funkcji analitycznej. Natomiast Michaił S. Mołodieński twierdzi, że w zasadzie geoida jest niemożliwa do wyznaczania, jeżeli nie jest znany rozkład gęstości i położenie mas leżących na zewnątrz geoidy. Zaproponował on używanie w miejsce geoidy pojęcia quasigeoidy, która nie jest powierzchnią ekwipotencjalną, lecz można ją wyznaczyć jednoznacznie. Na obszarze oceanów quasigeoida pokrywa się z geoidą, a pod lądami odstępy pomiędzy tymi powierzchniami nie przekraczają dwóch metrów.

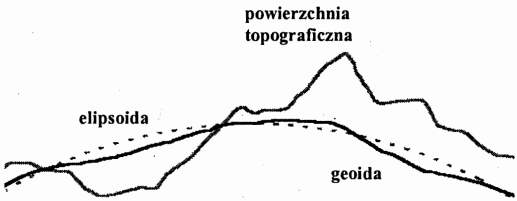
Jeżeli przy rozważaniach potencjału siły ciężkości przyjmiemy model Ziemi w postaci koncentrycznych kul o zmieniającej się gęstości, to tak otrzymane przybliżenie nosi nazwę sferoidy normalnej. Spotyka się też nazwy: sferoida ziemska, sferoida odniesienia, elipsoida Clairauta, elipsoida normalna. Sferoida normalna odpowiada zerowej powierzchni potencjału normalnego. Wykazano, że sferoida normalna odchyla się od tak samo spłaszczonej elipsoidy normalnej maksymalnie o trzy metry. W ten sposób potwierdzono przypuszczenie, że geoidę można w przybliżeniu uważać za elipsoidę obrotową, przy czym pojęcia elipsoidy ziemskiej i elipsoidy odniesienia nie są tożsame.

2. ELIPSOIDA

Elipsoidą ziemską nazywamy elipsoidę najlepiej dopasowaną do całej geoidy. Jej wyznaczenie jest utrudnione ze względu na niemożliwość pomiarów stopnia południka na obszarach oceanów. Współcześnie jej parametry wyznaczane są z pomiarów satelitarnych.

Elipsoidą odniesienia nazywamy elipsoidę najlepiej dopasowaną do fragmentu geoidy na obszarze danego kraju, grupy krajów lub kontynentu.

Ze względów praktycznych (możliwość wykonywania obliczeń), w geodezji wyższej i w nawigacji morskiej za powierzchnię odniesienia Ziemi przyjmuje się powierzchnię odpowiedniej elipsoidy (ziemskiej lub odniesienia). W prostszych przypadkach (dla małych odległości od znaków nawigacyjnych) jako powierzchnię odniesienia wykorzystuje się sferę (powierzchnię kuli) i niekiedy płaszczyznę styczną lub sieczną danego akwenu. Rysunek 1 ilustruje różnice pomiędzy faktycznym kształtem Ziemi, geoidą i elipsoidą.



Rys. 1. Różnice pomiędzy lokalnym kształtem Ziemi, geoidą i elipsoidą

Odchyleniem bezwzględnym pionu nazywamy kąt pomiędzy kierunkiem linii pionu, czyli normalną do geoidy a kierunkiem normalnej do elipsoidy ziemskiej w danym punkcie. Z kolei odchyleniem względnym nazywamy kąt pomiędzy normalną do geoidy a normalną do elipsoidy odniesienia.

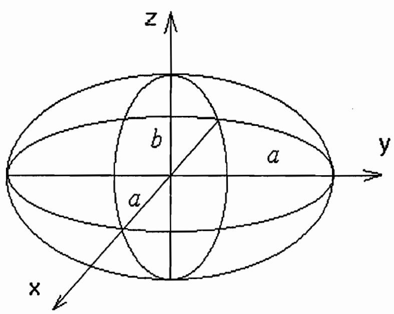
Elipsoidę obrotową (spłaszczoną) opisuje następujące równanie kanoniczne (rys. 2):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1, \tag{1}$$

gdzie:

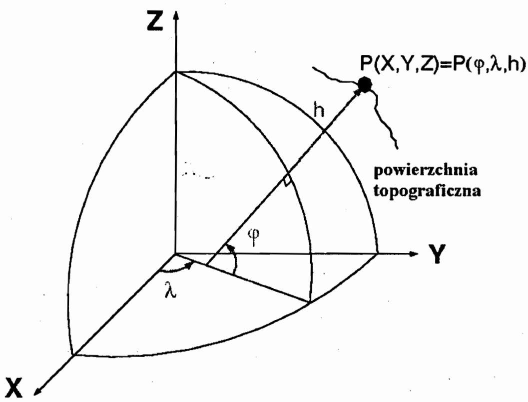
a – duża półoś elipsoidy,
b – mała półoś elipsoidy.

Z elipsoidą ziemską lub odniesienia wiąże się, oprócz układu współrzędnych kartezjańskich, układ współrzędnych geograficznych (elipsoidalnych). W układzie tym występują trzy współrzędne: szerokość geograficzna φ, długość geograficzna λ oraz wysokość elipsoidalna h. Szerokością geograficzną φ nazywamy kąt zawarty pomiędzy normalną do elipsoidy (odniesienia) w punkcie obserwatora a płaszczyzną równika (rys. 3).



Rys. 2. Elipsoida obrotowa we współrzędnych kartezjańskich

Długością geograficzną λ nazywamy kąt dwuścienny pomiędzy płaszczyzną południka zerowego i płaszczyzną południka obserwatora. Wysokość elipsoidalna to odległość euklidesowa pomiędzy punktem obserwatora a jego rzutem wzdłuż normalnej na elipsoidzie.



Rys. 3. Współrzędne geograficzne (elipsoidalne)

Powiązanie układu współrzędnych geograficznych z punktem związanym z Ziemią daje nam ziemski układ odniesienia. Natomiast powiązanie ze środkiem mas Ziemi i nadanie wartości liczbowych poszczególnym parametrom elipsoidy (oraz określenie pewnych stałych geofizycznych) daje nam geocentryczny układ odniesienia, np. WGS-84, GRS-80 itp.

3. PARAMETRY GEOMETRII ELIPSOIDY

Równanie (1) w pełni opisuje elipsoidę obrotową spłaszczoną. Jej głównymi parametrami są obie półosie a i b. Ponieważ zachodzą związki pomiędzy tymi osiami a pierwszym e i drugim e' mimośrodem oraz spłaszczeniem f, dlatego najczęściej jako parametry danej elipsoidy (ziemskiej, odniesienia) podaje się jedną z par: a i b, a i e lub a i f. Na ich podstawie można obliczyć pozostałe parametry.

Podstawowe i pochodne parametry elipsoidy

- a – duża półoś elipsoidy,
- b – mała półoś elipsoidy,
- kwadrat pierwszego mimośrodu

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}, \qquad (2)$$

- kwadrat drugiego mimośrodu

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}, \tag{3}$$

- promień krzywizny biegunowej

$$c = \frac{a^2}{b}, \tag{4}$$

- mimośród liniowy (odległość ogniska elipsy południkowej od początku układu)

$$E = \sqrt{a^2 - b^2}, \tag{5}$$

- spłaszczenie

$$f = \frac{a - b}{a}, \tag{6}$$

- promień średni półosi

$$R_1 = \frac{2a + b}{3}, \tag{7}$$

- promień sfery równoważnej powierzchnią

$$R_2 = c\left(\int_0^{\pi/2} \frac{\cos\varphi}{(1 + e'^2 \cos^2 \varphi)^2} d\varphi\right)^{1/2}, \tag{8}$$

- promień sfery równoważnej objętością

$$R_3 = \sqrt[3]{a^2 b}, \tag{9}$$

- średni promień krzywizny

$$R = \sqrt{R_N R_M}, \tag{10}$$

- promień pierwszego wertykału

$$R_N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}, \tag{11}$$

- promień krzywizny południka

$$R_M = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^3}}, \tag{12}$$

- średnia krzywizna (krzywizna Gaussa, krzywizna zupełna)

$$K = \frac{1}{R_M R_N}, \tag{13}$$

- długość łuku południka zawartego pomiędzy szerokościami geograficznymi φ_1 i φ_2:

$$\begin{aligned} s = a(1-e^2)[A(\varphi_2-\varphi_1) - B\sin(\varphi_2-\varphi_1)\cos(\varphi_1+\varphi_2) + \\ + \frac{C}{2}\sin 2(\varphi_2-\varphi_1)\cos 2(\varphi_1+\varphi_2) - \frac{D}{3}\sin 3(\varphi_2-\varphi_1)\cos 3(\varphi_1+\varphi_2) + \\ + \frac{E}{4}\sin 4(\varphi_2-\varphi_1)\cos 4(\varphi_1+\varphi_2) - \frac{F}{5}\sin 5(\varphi_2-\varphi_1)\cos 5(\varphi_1+\varphi_2), \end{aligned} \tag{14}$$

$$A = 1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \frac{175}{256}e^6 + \frac{11025}{16384}e^8 + \frac{43659}{65536}e^{10},$$

$$B = \frac{3}{4}e^2 + \frac{15}{16}e^4 + \frac{525}{512}e^6 + \frac{2205}{2048}e^8 + \frac{72765}{65536}e^{10},$$

$$C = \frac{15}{64}e^4 + \frac{105}{256}e^6 + \frac{2205}{4096}e^8 + \frac{10395}{16384}e^{10},$$

$$D = \frac{35}{512}e^6 + \frac{315}{2048}e^8 + \frac{31385}{131072}e^{10},$$

$$E = \frac{315}{16384}e^8 + \frac{3465}{65536}e^{10},$$

$$F = \frac{693}{131072}e^{10},$$

- długość łuku równoleżnika zawartego pomiędzy długościami geograficznymi λ_1 i λ_2

$$l = (\lambda_2 - \lambda_1) \cdot R_N \cos\varphi, \tag{15}$$

- szerokość geograficzna w funkcji współrzędnych kartezjańskich

$$\varphi = arctg\left(\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{z}{x}\right). \tag{16}$$

Pole powierzchni elipsoidy obrotowej

Elipsoidę obrotową (ziemską, odniesienia) otrzymujemy w wyniku obrotu elipsy południkowej wokół osi pokrywającej się z małą półosią b. Aby obliczyć jej pole powierzchni, należy obrócić wokół osi $0y$ elipsę o równaniu kanonicznym

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{17}$$

Ogólny wzór opisujący pole powierzchni bryły otrzymanej w wyniku obrotu krzywej x wokół osi $0y$ jest następujący:

$$S = 2\pi \int_{(A)}^{(B)} x\,dl,$$

gdzie dl oznacza długość łuku AB. Długość tego łuku obliczamy jako różniczkę

$$dl = \sqrt{1 + (x')^2}\,dy.$$

Stąd otrzymamy

$$S = 2\pi \int_{-y_1}^{y_2} x\sqrt{1 + (x')^2}\,dy, \tag{18}$$

czyli

$$S = 2\pi \int_{-y_1}^{y_2} \sqrt{x^2 + (x \cdot x')^2}\,dy \cdot \tag{19}$$

Ze wzoru (17) wyznacza się funkcję x. W kolejnych przekształceniach otrzymamy

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2},$$

$$x^2 = a^2\,\frac{b^2 - y^2}{b^2} = \frac{a^2}{b^2}\left(b^2 - y^2\right), \tag{20}$$

ostatecznie

$$x = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}\,. \tag{21}$$

Pochodną x' oblicza się w następujący sposób:

$$x' = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{\sqrt{(b^2 - y^2)^2}}\cdot(-2y),$$

$$x' = -\frac{a}{b}\cdot\frac{y}{\sqrt{(b^2 - y^2)^3}}\,. \tag{22}$$

Wynik taki można otrzymać prościej, poprzez różniczkowanie obustronnie (17) względem y:

$$\frac{2xx'}{a^2} + \frac{2y}{b^2} = 0\,.$$

I dalej

$$\frac{2xx'}{a^2} = -\frac{2y}{b^2} \quad \text{i} \quad \frac{xx'}{a^2} = -\frac{y}{b^2},$$

$$xx' = -\frac{a^2}{b^2}\,y, \tag{23}$$

$$(xx')^2 = \frac{a^4}{b^4}\,y^2. \tag{24}$$

Następnie do wzoru (19) wstawiamy wzory (20) i (24):

$$S = 2\pi \int_{-b}^{b} \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{b^2} y^2 + \frac{a^4}{b^4} y^2}\, dy = 4\pi \int_{0}^{b} \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{b^2} y^2 + \frac{a^4}{b^4} y^2}\, dy =$$

$$= 4\pi \cdot a \int_{0}^{b} \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2} + \frac{a^2}{b^4} y^2}\, dy = 4\pi \cdot a \int_{0}^{b} \sqrt{\frac{b^2}{b^2} - \frac{b^2}{b^4} y^2 + \frac{a^2}{b^4} y^2}\, dy =$$

$$= 4\pi \frac{a}{b} \int_{0}^{b} \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{b^2} y^2 + \frac{a^2}{b^2} y^2}\, dy = 4\pi \frac{a}{b} \int_{0}^{b} \sqrt{b^2 + \frac{a^2 - b^2}{b^2} y^2}\, dy =$$

$$= 4\pi \frac{a}{b} \int_{0}^{b} \sqrt{b^2 + e'^2 y^2}\, dy = 4\pi \frac{a \cdot e'}{b} \int_{0}^{b} \sqrt{\frac{b^2}{e'^2} + y^2}\, dy =$$

$$= 4\pi \frac{a \cdot e'}{b} \left[\frac{1}{2} \left(y \sqrt{\frac{b^2}{e'^2} + y^2} + \frac{b^2}{e'^2} \ln \left| y + \sqrt{\frac{b^2}{e'^2} + y^2} \right| \right) \right]_0^b =$$

$$= 2\pi \frac{a \cdot e'}{b} \left[\left(b \sqrt{\frac{b^2}{e'^2} + b^2} + \frac{b^2}{e'^2} \ln \left| b + \sqrt{\frac{b^2}{e'^2} + b^2} \right| \right) - \left(0 \sqrt{\frac{b^2}{e'^2} + 0} + \frac{b^2}{e'^2} \ln \left| 0 + \sqrt{\frac{b^2}{e'^2}} \right| \right) \right] =$$

$$= 2\pi \frac{a \cdot e'}{b} \left(b^2 \sqrt{1 + \frac{1}{e'^2}} + \frac{b^2}{e'^2} \left(\ln \left| b + b\sqrt{1 + \frac{1}{e'^2}} \right| - \ln \left| \frac{b}{e'} \right| \right) \right) =$$

$$= 2\pi \frac{a \cdot e'}{b} \left(b^2 \frac{\sqrt{1 + e'^2}}{e'} + \frac{b^2}{e'^2} \left(\ln \left| \frac{be' + b\sqrt{1 + e'^2}}{e'} \right| - \ln \left| \frac{b}{e'} \right| \right) \right) =$$

$$= 2\pi \cdot a \left(b\sqrt{1 + e'^2} + \frac{b}{e'} \left(\ln \left| \frac{be' + b\sqrt{1 + e'^2}}{e'} \cdot \frac{e'}{b} \right| \right) \right) =$$

$$= 2\pi \cdot a \left(b\frac{a}{b} + \frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \left(\ln \left| e' + \sqrt{1 + e'^2} \right| \right) \right),$$

czyli

$$S = 2\pi \cdot a \left(a + \frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b} \right| \right). \tag{25}$$

Stąd promień równoważnej powierzchniowo sfery

$$R_2 = \sqrt{\frac{a}{2}\left(a + \frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}\right|\right)}. \tag{26}$$

Pole powierzchni elipsoidy obrotowej w funkcji szerokości geograficznej

Elipsoida ziemska jest elipsoidą spłaszczoną o równaniu kanonicznym:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1. \tag{27}$$

Otrzymujemy ją w wyniku obrotu elipsy (17) względem osi $0z$ w układzie ortokartezjańskim $0xyz$.

Aby opisać pole powierzchni elipsoidy ziemskiej w funkcji szerokości geograficznej, należy dokonać zamiany zmiennych. W tym wypadku współrzędne prostokątne opisane są wzorami:

$$x = R_N \cos\varphi, \tag{28}$$

$$z = R_N (1 - e^2) \sin\varphi. \tag{29}$$

Podstawiając R_N (wzór (11)), po przekształceniach otrzymamy

$$x = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi}} \cos\varphi = \frac{a\sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{1 - e^2}\sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi}} \cos\varphi =$$

$$= \frac{a}{\frac{b}{a}\sqrt{1 + e'^2 \cos^2\varphi}} \cos\varphi = \frac{a^2}{b} \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1 + e'^2 \cos^2\varphi}}, \tag{30}$$

$$z = \frac{a(1 - e^2)}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi}} \sin\varphi = \frac{a\sqrt{1 - e^2} \sin\varphi}{\sqrt{1 + e'^2 \cos^2\varphi}} = \frac{b \sin\varphi}{\sqrt{1 + e'^2 \cos^2\varphi}}. \tag{31}$$

Jeśli elipsa południkowa wyrażona jest w postaci parametrycznej, to pole powierzchni elipsoidy obrotowej opisane jest następującym wzorem:

$$S = 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x(\varphi) \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2} \, d\varphi. \tag{32}$$

Obliczmy zatem odpowiednie pochodne:

$$\frac{dx}{d\varphi}=-\frac{a^2}{b}\frac{\sin\varphi}{\sqrt{1+e'^2\cos^2\varphi}}-\frac{1}{2}\frac{a^2}{b}\frac{\cos\varphi}{\sqrt{(1+e'^2\cos^2\varphi)^3}}\left(-2e'^2\sin\varphi\cos\varphi\right)=$$

$$=-\frac{a^2}{b}\frac{\sin\varphi}{\sqrt{1+e'^2\cos^2\varphi}}+\frac{a^2}{b}\frac{e'^2\sin\varphi\cos^2\varphi}{\sqrt{(1+e'^2\cos^2\varphi)^3}}=$$

$$=\frac{a^2}{b}\frac{\sin\varphi}{\sqrt{1+e'^2\cos^2\varphi}}\left(\frac{e'^2\cos^2\varphi-1-e'^2\cos^2\varphi}{1+e'^2\cos^2\varphi}\right)=-\frac{a^2}{b}\frac{\sin\varphi}{\sqrt{(1+e'^2\cos^2\varphi)^3}} \qquad (33)$$

oraz

$$\frac{dz}{d\varphi}=\frac{b\cos\varphi}{\sqrt{1+e'^2\cos^2\varphi}}-\frac{1}{2}\frac{b\sin\varphi}{\sqrt{(1+e'^2\cos^2\varphi)^3}}\left(-2e'^2\sin\varphi\cos\varphi\right)=$$

$$=\frac{b\cos\varphi}{\sqrt{1+e'^2\cos^2\varphi}}+\frac{be'^2\sin^2\varphi\cos\varphi}{\sqrt{(1+e'^2\cos^2\varphi)^3}}=\frac{b\cos\varphi}{\sqrt{1+e'^2\cos^2\varphi}}\left(1+\frac{e'^2\sin^2\varphi}{1+e'^2\cos^2\varphi}\right)=$$

$$=\frac{b\cos\varphi}{\sqrt{1+e'^2\cos^2\varphi}}\left(\frac{1+e'^2\cos^2\varphi+e'^2\sin^2\varphi}{1+e'^2\cos^2\varphi}\right)=\frac{b\cos\varphi}{\sqrt{1+e'^2\cos^2\varphi}}\frac{1+e'^2}{1+e'^2\cos^2\varphi}=$$

$$=\frac{b(1+e'^2)\cos\varphi}{\sqrt{(1+e'^2\cos^2\varphi)^3}}=\frac{a^2}{b}\frac{\cos\varphi}{\sqrt{(1+e'^2\cos^2\varphi)^3}}. \qquad (34)$$

Kwadraty tych pochodnych są równe

$$\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2=\frac{a^4}{b^2}\frac{\sin^2\varphi}{(1+e'^2\cos^2\varphi)^3},$$

$$\left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2=\frac{a^4}{b^2}\frac{\cos^2\varphi}{(1+e'^2\cos^2\varphi)^3},$$

a ich suma wyniesie

$$\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2=\frac{a^4}{b^2}\frac{\cos^2\varphi}{(1+e'^2\cos^2\varphi)^3}+\frac{a^4}{b^2}\frac{\sin^2\varphi}{(1+e'^2\cos^2\varphi)^3}=\frac{a^4}{b^2(1+e'^2\cos^2\varphi)^3}.$$

Wstawiając wyrażenie na x oraz sumę kwadratów pochodnych do wzoru na pole powierzchni elipsoidy obrotowej, otrzymamy

$$S = 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{a^2}{b} \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1+e'^2\cos^2\varphi}} \sqrt{\frac{a^4}{b^2(1+e'^2\cos^2\varphi)^3}}\, d\varphi =$$

$$= 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{a^4}{b^2} \frac{\cos\varphi}{(1+e'^2\cos^2\varphi)^2}\, d\varphi = 4\pi \frac{a^4}{b^2} \int_{0}^{\pi/2} \frac{\cos\varphi}{(1+e'^2\cos^2\varphi)^2}\, d\varphi . \tag{35}$$

Uwzględniając, że $c = \dfrac{a^2}{b}$, otrzymamy

$$S = 4\pi \cdot c^2 \int_{0}^{\pi/2} \frac{\cos\varphi}{(1+e'^2\cos^2\varphi)^2}\, d\varphi . \tag{36}$$

Ponieważ pole powierzchni kuli (sfery) wyraża się wzorem

$$S_{kuli} = 4\pi R^2 , \tag{37}$$

dlatego promień sfery równoważnej powierzchniowo danej elipsoidzie wynosi

$$R_2 = c\sqrt{\int_{0}^{\pi/2} \frac{\cos\varphi}{(1+e'^2\cos^2\varphi)^2}\, d\varphi} . \tag{38}$$

Objętość

Objętość można obliczyć w funkcji szerokości geograficznej. Ogólna postać objętości bryły obrotowej dla łuku w postaci parametrycznej

$$V = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2 \frac{dx}{dt}\, dt . \tag{39}$$

Stąd po uwzględnieniu wcześniejszych zależności, otrzymamy

$$V = 2\pi \int_{0}^{\pi/2} \frac{\cos^3\varphi}{\sqrt{(1+e'^2\cos^2\varphi)^5}}\, d\varphi . \tag{40}$$

Promień kuli równoważnej objętością

$$R_3 = \frac{3}{2} \frac{a^2}{b} \sqrt[3]{\int_{0}^{\pi/2} \frac{\cos^3\varphi}{\sqrt{(1+e'^2\cos^2\varphi)^5}}\, d\varphi} \cdot \tag{41}$$

Objętość elipsoidy spłaszczonej

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot a^2 b. \tag{42}$$

Objętość elipsoidy wydłużonej

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot ab^2. \tag{43}$$

Tożsamości

$$\frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1+e'^2\cos^2\varphi}}$$

Wyprowadzenie:

$$\sqrt{1-e^2}\sqrt{1+e'^2\cos^2\varphi} = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(1+e'^2\cos^2\varphi)} = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}+\frac{b^2}{a^2}\frac{a^2-b^2}{b^2}\cos^2\varphi} =$$

$$= \sqrt{\frac{b^2}{a^2}+\frac{a^2-b^2}{a^2}(1-\sin^2\varphi)} = \sqrt{1-e^2+e^2-e^2\sin^2\varphi} = \sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}$$

$$1-e^2 = \frac{b^2}{a_2}$$

$$1-e'^2 = \frac{a^2}{b_2}$$

$$(1-e^2)\cdot(1+e'^2) = 1$$

$$\frac{e^2}{1-e^2} = e'^2$$

$$\frac{e'^2}{1+e'^2} = e^2$$

$$a\sqrt{1-e^2} = b$$

4. PODSUMOWANIE

Podstawowymi parametrami elipsoidy dwuosiowej (spłaszczonej lub wydłużonej) są jej półosie – duża a i mała b. Pozostałe parametry są ich pochodnymi. Jednak ze względu na stosowane techniki pomiarowe, najczęściej podaje się dużą półoś a oraz pierwszy mimośród e lub spłaszczenie f. Natomiast pozostałe parametry (w tym mała półoś b) są wynikiem odpowiednich obliczeń.

Przedstawione w artykule definicje i zależności charakteryzujące elementy geometrii elipsoidy ziemskiej opisują jej parametry, niezbędne w wielu zagadnieniach obliczeniowych z zakresu geodezji wyższej, kartografii i nawigacji. W niniejszym artykule podano również oryginale wyprowadzenia wzorów na promienie równoważnych sfer powierzchniowo i objętościowo danej elipsoidzie, w funkcji szerokości geograficznej (elipsoidalnej). Sfery te wykorzystywane są do mniej precyzyjnych obliczeń nawigacyjnych lub w małoskalowych odwzorowaniach kartograficznych kuli ziemskiej. Wartości poszczególnych parametrów geometrycznych interesującej nas elipsoidy odniesienia otrzymujemy po podstawieniu do podanych wzorów konkretnych wartości odpowiednich parametrów podstawowych.

LITERATURA

1. Banachowicz A., Urbański J., *Obliczenia nawigacyjne*, Wydawnictwo AMW, Gdynia 1988.
2. Banachowicz A., *Obliczanie kąta pomiędzy promieniem wodzącym i normalną do elipsoidy*, Zeszyty Naukowe AMW, nr 4, 1989.
3. Barlik M., *Wstęp do teorii figury Ziemi*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1995.
4. Czarnecki K., *Geodezja współczesna w zarysie*, Wydawnictwo Wiedza i Życie, Warszawa 1996.
5. DMA Technical Report. DEPARTMENT OF DEFENSE WORLD GEODETIC SYSTEM 1984. *ITS DEFINITION AND RELATIONSHIPS WITH LOCAL GEODETIC SYSTEMS*. The Defense Mapping Agency 1987.
6. Baranow V.I. i in., *Kosmiczeskaja geodezija*, „Nedra”, Moskwa 1986.
7. Kuźmin B.S., *Topografo-geodeziczeskije terminy*. Spravocznik, „Nedra”, Moskwa 1989.
8. Urmajew M.S., Orbitalnyje metody kosmiczeskoj geodezji, „Nedra”, Moskwa 1981.

GEOMETRICAL ELEMENTS OF THE EARTH ELLIPSOID

(Summary)

This article presents definitions, description and derivation of formulas defining basic geometrical elements of ellipsoid from the point of view of geodesy, cartography and navigation. Thus they refer to earth ellipsoids or reference ellipsoids. This definition and the formulas are used in geodetic calculations, in calculating map graticule (ECDIS) and in navigational calculations- integrated navigation systems and automated radio receivers in navigation systems, transformation of coordinates, voyage planning and in a lot of other matters.